

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 3

FSV UK, ZS 2024-25

Termín číslo 5, 14. 2. 2025

1. Vyšetřete konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+3} - \sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}$$

(12 bodů)

2. Určete vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a spočtěte příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(12 bodů)

3. Napište Taylorův polynom šestého řádu pro funkci

$$f(x) = e^{x^2} \cdot \log(1 + x^3) - \sin(x^3)$$

v bodě 0 a s jeho pomocí pak spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5}.$$

(13 bodů)

4. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ v množině $G \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz \quad \text{a} \quad G = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(13 bodů)